2014年普通高等学校招生全国统一考试（山东卷）

文科数学

本试卷分第I卷和第II卷两部分，共4页。满分150分，考试用时120分钟。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

注意事项：

1． 答题前，考生务必用0.5毫米黑色签字笔将自己的姓名、座号、考生号、县区和科类填写在答题卡和试卷规定的位置上。

2． 第I卷每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如果改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号、答案写在试卷上无效。

3． 第II卷必须用0.5毫米黑色签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置，不能写在试卷上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不能使用涂改液、胶带纸、修正带，不按以上要求作答的答案无效。

4． 填空题请直接填写答案，解答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

参考公式：

如果事件A，B互斥，那么$P(A+B)=P(A)+P(B)$

第I卷（共50分）

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

(1) 已知$a,b\in R,i$是虚数单位. 若$a+i=2-bi$，则$(a+bi)^2=$

(A) $3-4i$　　(B) $3+4i$　　(C) $4-3i$　　(D) $4+3i$

(2) 设集合$A=\{x\,|\,x^2-2x<0\},B=\{x\,|\,1\le x\le 4\}$，则$A\cap B=$

(A) $(0,2]$　　(B) $(1,2)$　　(C) $[1,2)$　　(D) $(1,4)$

(3) 函数$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\log_2 x-1}}$的定义域为

(A) $(0,2)$　　(B) $(0,2]$　　(C) $(2,+\infty)$　　(D) $[2,+\infty)$

(4) 用反证法证明命题："设a,b为实数，则方程$x^3+ax+b=0$至少有一个实根"时，要做的假设是

(A) 方程$x^3+ax+b=0$没有实根　　(B) 方程$x^3+ax+b=0$至多有一个实根

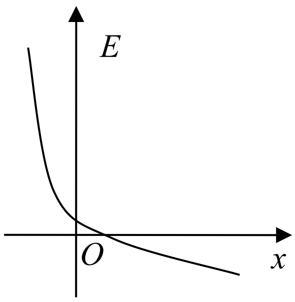
(C) 方程$x^3+ax+b=0$至多有两个实根　　(D) 方程$x^3+ax+b=0$恰好有两个实根

(5) 已知实数x,y满足$a^x<a^y(0<a<1)$，则下列关系式恒成立的是

(A) $x^3>y^3$　　(B) $\sin x>\sin y$

(C) $\ln(x^2+1)>\ln(y^2+1)$　　(D) $\frac{1}{x^2+1}>\frac{1}{y^2+1}$

(6) 已知函数$y=\log_a(x+c)(a,c为常数，其中a>0,a\neq 1)$的图象如右图，则下列结论成立的是



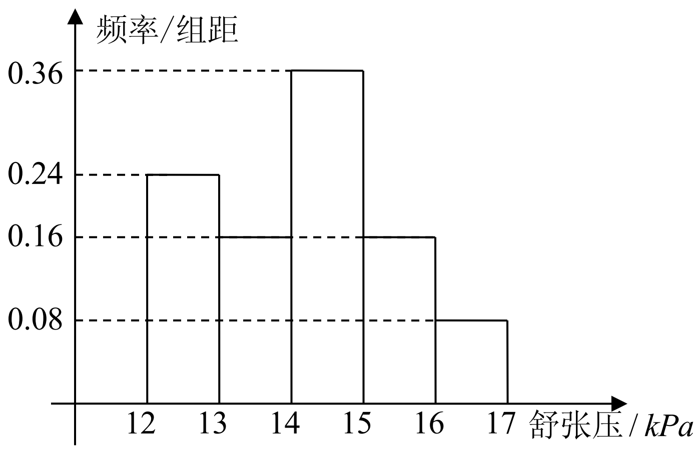
(A) $a>0,c>1$　　(B) $a>1,0<c<1$

(C) $0<a<1,c>1$　　(D) $0<a<1,0<c<1$

(7) 已知向量$\vec{a}=(1,\sqrt{3}),\vec{b}=(3,m)$. 若向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{6}$，则实数$m=$

(A) $2\sqrt{3}$　　(B) $\sqrt{3}$　　(C) 0　　(D) $-\sqrt{3}$

(8) 为了研究某药品的疗效，选取若干名志愿者进行临床试验，所有志愿者的舒张压数据（单位：kPa）的分组区间为$[12,13),[13,14),[14,15),[15,16),[16,17]$，将其按从左到右的顺序分别编号为第一组，第二组，……，第五组，右图是根据试验数据制成的频率分布直方图。已知第一组与第二组共有20人，第三组中没有疗效的有6人，则第三组中有疗效的人数为



(A) 6

(B) 8

(C) 12

(D) 18

(9) 对于函数 $f(x)$，若存在常数 $a\neq 0$， 使得 x 取定义域内的每一个值，都有 $f(x)=f(2a-x)$，则称 $f(x)$ 为准偶函数，下列函数中是准偶函数的是

(A) $f(x)=\sqrt{x}$　　(B) $f(x)=x^3$

(C) $f(x)=\tan x$　　(D) $f(x)=\cos(x+1)$

(10) 已知 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y-1\leq 0,\\ 2x-y-3\geq 0,\end{cases}$ 当目标函数 $z=ax+by\ (a>0,b>0)$ 在该约束条件下取到最小值 $2\sqrt{5}$ 时，a^2+b^2 的最小值为

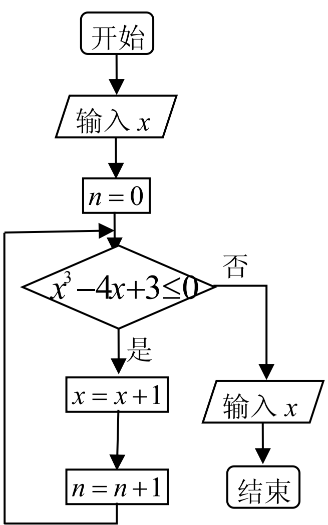
(A)　5　　(B) 4　　(C) $\sqrt{5}$　　(D) 2

第 II 卷（共 100 分）

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

(11) 执行右面的程序框图，若输入的 x 的值为 1，则输出的 n 的值为____.

(12) 函数 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\cos^2 x$ 的最小正周期为_____.



(13) 一个六棱锥的体积为$2\sqrt{3}$，其底面是边长为 2 的正六边形，侧棱长都相等，则该六棱锥的侧面积为________。

(14) 圆心在直线$x-2y=0$上的圆C与y轴的正半轴相切，圆C截x轴所得弦的长为$2\sqrt{3}$，则圆C的标准方程为____。

(15) 已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的焦距为$2c$，右顶点为 A，抛物线$x^2=2py(p>0)$的焦点为 F，若双曲线截抛物线的准线所得线段长为$2c$，且$|FA|=c$，则双曲线的渐近线方程为____________。

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分.

(16)（本小题满分 12 分）

海关对同时从 A，B，C 三个不同地区进口的某种商品进行抽样检测，从各地区进口此种商品的数量（单位：件）如右表所示. 工作人员用分层抽样的方法从这些商品中共抽取 6 件样品进行检测.

地区	A	B	C
数量	50	150	100

（Ⅰ）求这 6 件样品中来自 A，B，C 各地区商品的数量；

（II）若在这 6 件样品中随机抽取 2 件送往甲机构进行进一步检测，求这 2 件商品来自相同地区的概率.

(17)（本小题满分 12 分）

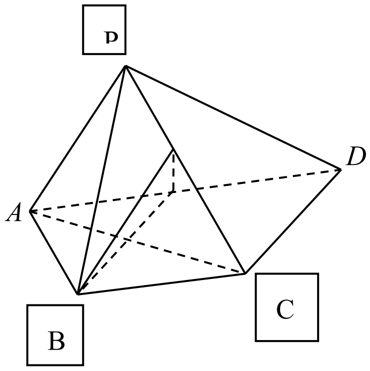
ΔABC中，角 A，B，C 所对的边分别为a,b,c. 已知$a=3,\cos A=\dfrac{\sqrt{6}}{3},B=A+\dfrac{\pi}{2}$.

（Ⅰ）求b的值；

（II）求ΔABC的面积.

(18)（本小题满分 12 分）

如图，四棱锥$P-ABCD$中，$AP\perp$平面$PCD, AD// BC, AB=BC=\dfrac{1}{2}AD, E, F$分别为线段$AD, PC$的中点.



（Ⅰ）求证：$AP//$ 平面BEF；

（II）求证：$BE\perp$ 平面PAC.

(19)（本小题满分 12 分）

在等差数列$\{a_n\}$中，已知公差$a_1=2$，a_2是a_1与a_4的等比中项.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（II）设$b_n=a_{\frac{n(n+1)}{2}}$，记$T_n=-b_1+b_2-b_3+b_4-\cdots+(-1)^n b_n$，求$T_n$.

(20)（本小题满分 13 分）

设函数$f(x)=a\ln x+\dfrac{x-1}{x+1}$，其中$a$为常数.

（Ⅰ）若$a=0$，求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

（II）讨论函数$f(x)$的单调性.

(21)（本小题满分 14 分）

在平面直角坐标系xOy中，椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，直线$y=x$被椭圆$C$截得的线段长为$\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（II）过原点的直线与椭圆 C 交于 A，B 两点（A，B 不是椭圆 C 的顶点）. 点 D 在椭圆 C 上，且

$AD \perp AB$，直线 BD 与 x 轴、 y 轴分别交于 M，N 两点.

（i）设直线 BD，AM 的斜率分别为 k_1, k_2，证明存在常数 λ 使得 $k_1 = \lambda k_2$，并求出 λ 的值；

（ii）求 ΔOMN 面积的最大值.

2014 年高考山东卷文科数学真题及参考答案

一．选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题给出的四个选项中，选择符合题目要求的选项。

（1）已知 $a,b \in R, i$ 是虚数单位，若 $a+i=2-bi$，则 $(a+bi)^2=$

（A）$3-4i$　　（B）$3+4i$　　（C）$4-3i$　　（D）$4+3i$

【解析】由 $a+i=2-bi$ 得，$a=2$，$b=-1$，$(a+bi)^2=(2-i)^2=4-4i+i^2=3-4i$

故答案选 A

（2）设集合 $A=\{x|x^2-2x<0\}, B=\{x|1\le x\le 4\}$, 则 $A\cap B=$

（A）(0,2]　　（B）(1,2)　　（C）[1,2)　　（D）(1,4)

【解析】$A=(0,2)$，$B=[1,4]$，数轴上表示出来得到 $A\cap B=[1,2)$

故答案为 C

（3）函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\log_2 x-1}}$ 的定义域为

（A）$(0,2)$　　（B）$(0,2]$　　（C）$(2,+\infty)$　（D）$[2,+\infty)$

【解析】$\log_2 x-1>0$ 故 $x>2$。选 D

（4）用反证法证明命题“设 $a,b\in R$, 则方程 $x^2+ax+b=0$ 至少有一个实根”时要做的假设是

（A）方程 $x^2+ax+b=0$ 没有实根　　（B）方程 $x^2+ax+b=0$ 至多有一个实根

（C）方程 $x^2+ax+b=0$ 至多有两个实根　（D）方程 $x^2+ax+b=0$ 恰好有两个实根

【解析】答案选 A，解析略。

（5）已知实数 x, y 满足 $a^x<a^y(0<a<1)$，则下列关系式恒成龙的是

（A）$x^3>y^3$　　（B）$\sin x>\sin y$

（C）$\ln(x^2+1)>\ln(y^2+1)$　　　　　　（D）$\dfrac{1}{x^2+1}>\dfrac{1}{y^2+1}$

【解析】由 $a^x<a^y(0<a<1)$ 得，$x>y$，但是不可以确定 x^2 与 y^2 的大小关系，故 C、D 排除，而 $y=\sin x$ 本身是一个周期函数，故 B 也不对，$x^3>y^3$ 正确。

（6）已知函数 $y=\log_a(x+c)(a,c$为常数。其中$a>0,a\neq1)$ 的图像如右图，则下列结论成立的是

（A）$a>1,c>1$　　　　　　（B）$a>1,0<c<1$

（C）$0<a<1,c>1$　　　　　　（D）$0<a<1,0<c<1$

【解析】

由图象单调递减的性质可得 $0<a<1$，向左平移小于 1 个单位，故 $0<c<1$

答案选 C

（7）已知向量 $a=(1,\sqrt{3}),b=(3,m)$.若向量 a,b 的夹角为 $\dfrac{\pi}{6}$，则实数 $m=$

（A）$2\sqrt{3}$　　　　（B）$\sqrt{3}$　　　　（C）0　　　　（D）$-\sqrt{3}$

【解析】:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3+\sqrt{3}m$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=2\sqrt{9+m^2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore 3+\sqrt{3}m=\sqrt{3}\cdot\sqrt{9+m^2}\ \therefore m=\sqrt{3}$

答案：B

（8）为了研究某药品的疗效，选取若干名志愿者进行临床实验。所有志愿者的舒张压数据（单位：kPa）的分组区间为[12,13），[13,14），[14,15），[15,16].将其按从左到右的顺序分别编号为第一组，第二组，……，第五组。右图是根据试验数据制成的频率分布直方图。已知第一组和第二组共有 20 人，第三组中没有疗效的有 6 人，则第三组中有疗效的人数为

（A）6　　　　（B）8　　　　（C）12　　　　（D）18

【解析】：第一组与第二组频率之和为 0.24+0.16=0.4

$20\div0.4=50$

$50\times0.36=18$

$18-6=12$

答案：C

（9）对于函数 $f(x)$，若存在常数 $a\neq0$，使得 x 取定义域内的每一个值，都有 $f(x)=f(2a-x)$，则称 $f(x)$ 为准偶函数。下列函数中是准偶函数的是

（A）$f(x)=\sqrt{x}$　　（B）$f(x)=x^2$　　（C）$f(x)=\tan x$（D）$f(x)=\cos(x+1)$

【解析】：由分析可知准偶函数即偶函数左右平移得到的。

答案：D

（10）已知 x,y 满足的约束条件 $\begin{cases}x-y-1\leq0,\\2x-y-3\geq0,\end{cases}$ 当目标函数 $z=ax+by(a>0,b>0)$ 在该约束条件下取得最

小值 $2\sqrt{5}$ 时，a^2+b^2 的最小值为

（A）5　　（B）4　　（C）$\sqrt{5}$　　（D）2

【解析】：$\begin{cases} x-y-1\le 0 \\ 2x-y-3\ge 0 \end{cases}$ 求得交点为 $\left(2,1\right)$，则 $2a+b=2\sqrt{5}$，即圆心 $\left(0,0\right)$ 到直线 $2a+b-2\sqrt{5}=0$ 的距离的平方 $\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)^2=2^2=4$。

答案：B

二．填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分，答案须填在题中横线上。

11．执行右面的程序框图，若输入的 x 的值为 1，则输出的 n 的值为 ________ 。

【解析】：根据判断条件 $x^2-4x+3\le 0$，得 $1\le x\le 3$，

输入 $x=1$

第一次判断后循环，$x=x+1=2, n=n+1=1$

第二次判断后循环，$x=x+1=3, n=n+1=2$

第三次判断后循环，$x=x+1=4, n=n+1=3$

第四次判断不满足条件，退出循环，输出 $n=3$

答案：3

12．函数 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\cos^2 x$ 的最小正周期为 ________ 。

【解析】：$y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\cos^2 x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{2}=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}$

$\therefore T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

答案：$T=\pi$

13．一个六棱锥的体积为 $2\sqrt{3}$，其底面是边长为 2 的正六边形，侧棱长都相等，则该六棱锥的侧面积为 ________ 。

【解析】：设六棱锥的高为 h，斜高为 h'，

则由体积 $V=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin 60^\circ\times 6\right)\times h=2\sqrt{3}$ 得：$h=1$，$h'=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+h^2}=2$

$\therefore$ 侧面积为 $\dfrac{1}{2}\times 2\times h'\times 6=12$.

答案：12

14．圆心在直线 $x-2y=0$ 上的圆 C 与 y 轴的正半轴相切，圆 C 截 x 轴所得的弦的长 $2\sqrt{3}$，则圆 C 的标

准方程为 ________ 。

【解析】设圆心$\left(a,\dfrac{a}{2}\right)(a>0)$，半径为$a$. 由勾股定理$\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=a^2$得：$a=2$

$\therefore$圆心为$(2,1)$，半径为 2，$\therefore$圆C的标准方程为$(x-2)^2+(y-1)^2=4$

答案：$(x-2)^2+(y-1)^2=4$

15．已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的焦距为$2c$，右顶点为$A$，抛物线$x^2=2py(p>0)$的焦点为$F$，若双曲线截抛物线的准线所得线段长为$2c$，且$|FA|=c$，则双曲线的渐近线方程为 ________ 。

【解析】 由题意知$\dfrac{P}{2}=\sqrt{c^2-a^2}=b$，

抛物线准线与双曲线的一个交点坐标为$\left(c,\dfrac{P}{2}\right)$，

即$(c,-b)$代入双曲线方程为$\dfrac{c^2}{a^2}-\dfrac{b^2}{b^2}=1$，得$\dfrac{c^2}{a^2}=2$，

$\therefore$渐近线方程为$y=\pm x$，$\therefore\dfrac{b}{a}=\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}-1}=1$.

答案：1

三．解答题：本大题共 6 小题，共 75 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（16）（本小题满分 12 分）

海关对同时从A,B,C三个不同地区进口的某种商品进行抽样检测，从各地区进口此种商品的数量（单位：件）如右表所示，工作人员用分层抽样的方法从这些商品中共抽取 6 件样品进行检测。

地区	A	B	C
数量	50	150	100

（Ⅰ）求这 6 件样品中来自A,B,C各地区样品的数量；

（Ⅱ）若在这 6 件样品中随机抽取 2 件送往甲机构进行进一步检测，求这 2 件商品来自相同地区的概率。

（16）【解析】:

（Ⅰ）因为工作人员是按分层抽样抽取商品，所以各地区抽取商品比例为：

$A:B:C=50:150:100=1:3:2$

所以各地区抽取商品数为：$A:6\times\dfrac{1}{6}=1$，$B:6\times\dfrac{3}{6}=3$，$C:6\times\dfrac{2}{6}=2$；

（Ⅱ）设各地区商品分别为：A,B_1,B_2,B_3,C_1,C_2

基本时间空间Ω为：$(A,B_1),(A,B_2),(A,B_3),(A,C_1),(A,C_2),(B_1,B_2),(B_1,B_3)$

$(B_1,C_1),(B_1,C_2),(B_2,B_3),(B_2,C_1),(B_2,C_2),(B_3,C_1),(B_3,C_2),(C_1,C_2)$，共 15 个.

样本时间空间为：$(B_1,B_2),(B_1,B_3),(B_2,B_3),(C_1,C_2)$

所以这两件商品来自同一地区的概率为：$P(A)=\dfrac{4}{15}$.

（17）（本小题满分 12 分）

在ΔABC中，角A,B,C所对的边分别是a,b,c。已知$a=3,\cos A=\dfrac{\sqrt{6}}{3},B=A+\dfrac{\pi}{2}$.

（Ⅰ）求b的值；

（Ⅱ）求ΔABC的面积。

（17）【解析】:

（Ⅰ）由题意知：$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$$\sin B=\sin\left(A+\frac{\pi}{2}\right)=\sin A\cos\frac{\pi}{2}+\cos A\sin\frac{\pi}{2}=\cos A=\frac{\sqrt{6}}{3},$$

由正弦定理得：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}\Rightarrow b=\dfrac{a\cdot\sin B}{\sin A}=3\sqrt{2}$

（Ⅱ）由余弦定理得：

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{6}}{3}\Rightarrow c^2-4\sqrt{3}c+9=0\Rightarrow c_1=\sqrt{3},c_2=3\sqrt{3},$$

又因为$B=A+\dfrac{\pi}{2}$为钝角，所以$b>c$，即$c=\sqrt{3}$，

所以$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

（18）（本小题满分 12 分）

如图，四棱锥$P-ABCD$中，$AP\perp$平面$PCD, AD//BC,\ AB=BC=\dfrac{1}{2}AD$，$E,F$分别为线段$AD,PC$的中点。

（Ⅰ）求证：$AP//$平面BEF

（Ⅱ）求证：$BE\perp$平面PAC

【解析】:（Ⅰ）连接 AC 交 BE 于点 O，连接 OF，不妨设 AB=BC=1,则 AD=2

$\because AB=BC, AD//BC,\therefore$四边形 ABCE 为菱形

$\because O,F$分别为AC,PC中点，$\therefore OF//AP$

又$\because OF\subset$平面BEF，$\therefore AP//$平面BEF

（Ⅱ）$\because AP\perp$平面PCD，$CD\subset$平面PCD，$\therefore AP\perp CD$

$\because BC//ED, BC=ED,\therefore BCDE$为平行四边形，$\therefore BE//CD$，$\therefore BE\perp PA$

又$\because ABCE$为菱形，$\therefore BE \perp AC$

又$\because PA \cap AC = A, PA$、$AC \subset$平面$PAC$，$\therefore BE \perp$平面$PAC$

（19）（本小题满分 12 分）

在等差数列$\left\{a_n\right\}$中，已知$d=2$，a_2是a_1与a_4等比中项.

（Ⅰ）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

（Ⅱ）设$b_n = a_{\frac{n(n+1)}{2}}$，记$T_n = -b_1 + b_2 - b_3 + \cdots + (-1)^n b_n$，求$T_n$.

【解析】：（Ⅰ）由题意知：

$\{a_n\}$为等差数列，设$a_n = a_1 + (n-1)d$，$\because a_2$为a_1与a_4的等比中项

$\therefore a_2^2 = a_1 \times a_4$且$a_1 \neq 0$，即$(a_1+d)^2 = a_1(a_1+3d)$，$\because d=2$ 解得：$a_1 = 2$

$\therefore a_n = 2 + (n-1)\times 2 = 2n$

（Ⅱ）由（Ⅰ）知：$a_n = 2n$，$b_n = a_{\frac{n(n+1)}{2}} = n(n+1)$

①当 n 为偶数时：

$$\begin{aligned} T_n &= -(1\times 2) + (2\times 3) - (3\times 4) + \cdots\cdots + n(n+1) \\ &= 2(-1+3) + 4(-3+5) + \cdots\cdots + n[-(n-1)+(n+1)] \\ &= 2\times 2 + 4\times 2 + 6\times 2 + \cdots\cdots + n\times 2 \\ &= 2\times(2+4+6+\cdots\cdots+n) \\ &= 2\times\frac{(2+n)\frac{n}{2}}{2} = \frac{n^2+2n}{2} \end{aligned}$$

②当 n 为奇数时：

$$\begin{aligned} T_n &= -(1\times 2) + (2\times 3) - (3\times 4) + \cdots\cdots - n(n+1) \\ &= 2(-1+3) + 4(-3+5) + \cdots\cdots + (n-1)[-(n-2)+n] - n(n+1) \\ &= 2\times 2 + 4\times 2 + 6\times 2 + \cdots\cdots + (n-1)\times 2 - n(n+1) \\ &= 2\times[2+4+6+\cdots\cdots+(n-1)] - n(n+1) \\ &= 2\times\frac{(2+n-1)\frac{n-1}{2}}{2} - n(n-1) = -\frac{n^2+2n+1}{2} \end{aligned}$$

综上：$T_n = \begin{cases} -\dfrac{n^2+2n+1}{2}, & n\text{为奇数} \\ \dfrac{n^2+2n}{2}, & n\text{为偶数} \end{cases}$

（20）（本小题满分 13 分）

设函数 $f\left(x\right)=a\ln x+\dfrac{x-1}{x+1}$，其中 a 为常数.

（Ⅰ）若 $a=0$，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程；

（Ⅱ）讨论函数 $f\left(x\right)$ 的单调性.

【解析】(1) 当 $a=0$ 时 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}, f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$

$f'(1)=\dfrac{2}{(1+1)^2}=\dfrac{1}{2}$

又 $\because f(1)=0 \therefore$ 直线过点 $(1,0)$

$\therefore y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$

(2) $f'(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{2}{(x+1)^2}\ (x>0)$

①当 $a=0$ 时，$f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$ 恒大于 $0.f(x)$ 在定义域上单调递增.

②当 $a>0$ 时，$f'(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{2}{(x+1)^2}=\dfrac{a(x+1)^2+2x}{x(x+1)^2}>0.f(x)$ 在定义域上单调递增.

③当 $a<0$ 时，$\Delta=(2a+2)^2-4a^2=8a+4\le 0$，即 $a\le -\dfrac{1}{2}$.

开口向下，$f(x)$ 在定义域上单调递减。

当 $-\dfrac{1}{2}<a<0$ 时，$\Delta>0.x_{1,2}=\dfrac{-(2a+2)\pm\sqrt{8a+4}}{2a}=\dfrac{-a-1\pm\sqrt{2a+1}}{a}$

对称轴方程为 $x=-\dfrac{2a+2}{2a}=-1-\dfrac{1}{a}>0$.且 $x_1\bullet x_2=1>0$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\dfrac{-a-1-\sqrt{2a+1}}{a})$ 单调递减，$(\dfrac{-a-1-\sqrt{2a+1}}{a},\dfrac{-a-1+\sqrt{2a+1}}{a})$ 单调递增，

$(\dfrac{-a-1+\sqrt{2a+1}}{a},+\infty)$ 单调递减。

综上所述，$a=0$ 时，$f(x)$ 在定义域上单调递增；$a>0$ 时，$f(x)$ 在定义域上单调递增

$a\le -\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在定义域上单调递减；$-\dfrac{1}{2}<a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{-a-1-\sqrt{2a+1}}{a})$ 单调递减，

$(\dfrac{-a-1-\sqrt{2a+1}}{a},\dfrac{-a-1+\sqrt{2a+1}}{a})$ 单调递增，$(\dfrac{-a-1+\sqrt{2a+1}}{a},+\infty)$ 单调递减。

（21）（本小题满分 14 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，直线 $y=x$ 被椭圆 C 截得

的线段长为$\frac{4\sqrt{10}}{5}$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）过原点的直线与椭圆C交于A,B两点（A,B不是椭圆C的顶点），点D在椭圆C上，且$AD\perp AB$，直线BD与x轴、y轴分别交于M,N两点.

（i）设直线BD,AM的斜率分别为k_1,k_2.证明存在常数λ使得$k_1=\lambda k_2$，并求出λ的值；

（ii）求$\triangle OMN$面积的最大值.

【解析】(1)$\because e=\frac{\sqrt{3}}{2}\therefore\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$即$\frac{c^2}{a^2}=\frac{3}{4},\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{3}{4}\therefore a^2=4b^2$

设直线与椭圆交于p,q两点。不妨设p点为直线和椭圆在第一象限的交点。

又$\because$弦长为$\frac{4\sqrt{10}}{5},\therefore p(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5})$

$\therefore\frac{\frac{4}{5}}{a^2}+\frac{\frac{4}{5}}{b^2}=1$

联立解得$a^2=4,b^2=1$

$\therefore$椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.