

2014 年普通高等学校招生全国统一考试（山东卷）

文科数学

本试卷分第 I 卷和第 II 卷两部分，共 4 页。满分 150 分，考试用时 120 分钟。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

注意事项：

1. 答题前，考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、座号、考生号、县区和科类填写在答题卡和试卷规定的位置上。
2. 第 I 卷每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如果改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号、答案写在试卷上无效。
3. 第 II 卷必须用 0.5 毫米黑色签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置，不能写在试卷上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不能使用涂改液、胶带纸、修正带，不按以上要求作答的答案无效。
4. 填空题请直接填写答案，解答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

参考公式：

如果事件 A，B 互斥，那么 $P(A+B) = P(A) + P(B)$

第 I 卷（共 50 分）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

(1) 已知 $a, b \in R, i$ 是虚数单位. 若 $a+i=2-bi$ ，则 $(a+bi)^2 =$

- (A) $3-4i$ (B) $3+4i$ (C) $4-3i$ (D) $4+3i$

(2) 设集合 $A = \{x | x^2 - 2x < 0\}, B = \{x | 1 \leq x \leq 4\}$ ，则 $A \cap B =$

- (A) $(0, 2]$ (B) $(1, 2)$ (C) $[1, 2)$ (D) $(1, 4)$

(3) 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\log_2 x - 1}}$ 的定义域为

- (A) $(0, 2)$ (B) $(0, 2]$ (C) $(2, +\infty)$ (D) $[2, +\infty)$

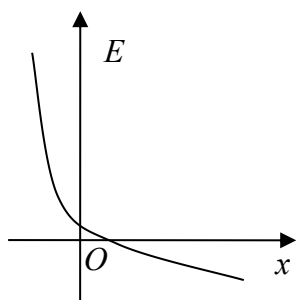
(4) 用反证法证明命题：“设 a, b 为实数，则方程 $x^3 + ax + b = 0$ 至少有一个实根”时，要做的假设是

- (A) 方程 $x^3 + ax + b = 0$ 没有实根 (B) 方程 $x^3 + ax + b = 0$ 至多有一个实根
(C) 方程 $x^3 + ax + b = 0$ 至多有两个实根 (D) 方程 $x^3 + ax + b = 0$ 恰好有两个实根

(5) 已知实数 x, y 满足 $a^x < a^y$ ($0 < a < 1$)，则下列关系式恒成立的是

- (A) $x^3 > y^3$ (B) $\sin x > \sin y$
(C) $\ln(x^2 + 1) > \ln(y^2 + 1)$ (D) $\frac{1}{x^2 + 1} > \frac{1}{y^2 + 1}$

(6) 已知函数 $y = \log_a(x + c)$ (a, c 为常数，其中 $a > 0, a \neq 1$) 的图象如右图，则下列结论成立的是

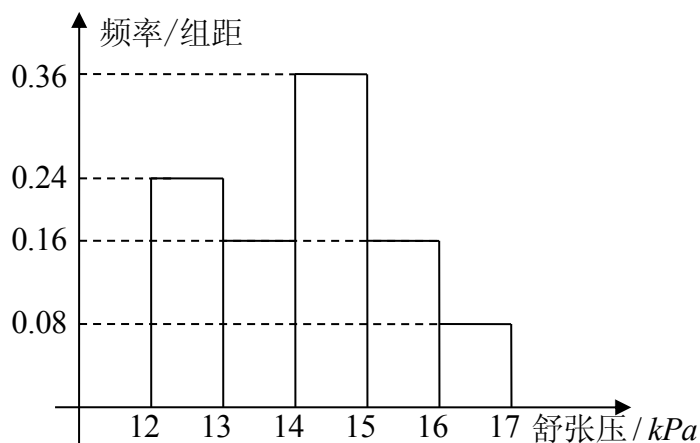


- (A) $a > 0, c > 1$ (B) $a > 1, 0 < c < 1$
(C) $0 < a < 1, c > 1$ (D) $0 < a < 1, 0 < c < 1$

(7) 已知向量 $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$, $\vec{b} = (3, m)$. 若向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$ ，则实数 $m =$

- (A) $2\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 0 (D) $-\sqrt{3}$

(8) 为了研究某药品的疗效，选取若干名志愿者进行临床试验，所有志愿者的舒张压数据（单位：kPa）的分组区间为 $[12, 13), [13, 14), [14, 15), [15, 16), [16, 17]$ ，将其按从左到右的顺序分别编号为第一组，第二组，……，第五组，右图是根据试验数据制成的频率分布直方图。已知第一组与第二组共有 20 人，第三组中没有疗效的有 6 人，则第三组中有疗效的人数为



- (A) 6
(B) 8
(C) 12
(D) 18

(9) 对于函数 $f(x)$ ，若存在常数 $a \neq 0$ ，使得 x 取定义域内的每一个值，都有 $f(x) = f(2a - x)$ ，则称 $f(x)$ 为准偶函数，下列函数中是准偶函数的是

- (A) $f(x) = \sqrt{x}$ (B) $f(x) = x^3$
(C) $f(x) = \tan x$ (D) $f(x) = \cos(x+1)$

(10) 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y - 1 \leq 0, \\ 2x - y - 3 \geq 0, \end{cases}$ 当目标函数 $z = ax + by$ ($a > 0, b > 0$) 在该约束条件下取到最小值 $2\sqrt{5}$ 时， $a^2 + b^2$ 的最小值为

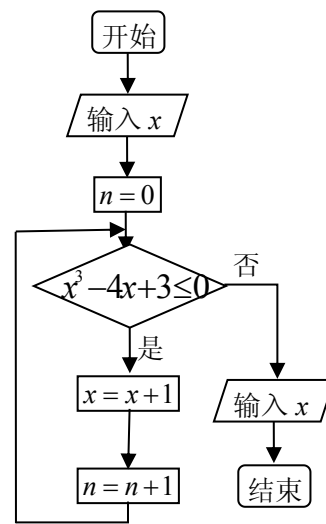
- (A) 5 (B) 4 (C) $\sqrt{5}$ (D) 2

第 II 卷（共 100 分）

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

(11) 执行右面的程序框图，若输入的 x 的值为 1，则输出的 n 的值为_____.

(12) 函数 $y = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \cos^2 x$ 的最小正周期为_____.



(13) 一个六棱锥的体积为 $2\sqrt{3}$ ，其底面是边长为 2 的正六边形，侧棱长都相等，则该六棱锥的侧面积为_____。

(14) 圆心在直线 $x-2y=0$ 上的圆 C 与 y 轴的正半轴相切，圆 C 截 x 轴所得弦的长为 $2\sqrt{3}$ ，则圆 C 的标准方程为_____。

(15) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦距为 $2c$ ，右顶点为 A ，抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F ，若双曲线截抛物线的准线所得线段长为 $2c$ ，且 $|FA| = c$ ，则双曲线的渐近线方程为_____。

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分.

(16) (本小题满分 12 分)

海关对同时从 A, B, C 三个不同地区进口的某种商品进行抽样检测，从各地区进口此种商品的数量（单位：件）如右表所示. 工作人员用分层抽样的方法从这些商品中共抽取 6 件样品进行检测.

地区	A	B	C
数量	50	150	100

(I) 求这 6 件样品中来自 A, B, C 各地区商品的数量；

(II) 若在这 6 件样品中随机抽取 2 件送往甲机构进行进一步检测，求这 2 件商品来自相同地区的概率.

(17) (本小题满分 12 分)

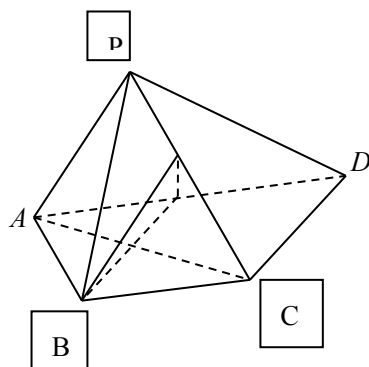
$\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $a = 3, \cos A = \frac{\sqrt{6}}{3}, B = A + \frac{\pi}{2}$.

(I) 求 b 的值；

(II) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

(18) (本小题满分 12 分)

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中， $AP \perp$ 平面 PCD , $AD \parallel BC$, $AB = BC = \frac{1}{2}AD$, E, F 分别为线段 AD, PC 的中点.



(I) 求证: $AP \parallel$ 平面 BEF ;

(II) 求证: $BE \perp$ 平面 PAC .

(19) (本小题满分 12 分)

在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知公差 $a_1 = 2$, a_2 是 a_1 与 a_4 的等比中项.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $b_n = a_{\frac{n(n+1)}{2}}$, 记 $T_n = -b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - \cdots + (-1)^n b_n$, 求 T_n .

(20) (本小题满分 13 分)

设函数 $f(x) = a \ln x + \frac{x-1}{x+1}$, 其中 a 为常数.

(I) 若 $a = 0$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

(21) (本小题满分 14 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 直线 $y = x$ 被椭圆 C 截得的线段长为 $\frac{4\sqrt{10}}{5}$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 过原点的直线与椭圆 C 交于 A, B 两点 (A, B 不是椭圆 C 的顶点). 点 D 在椭圆 C 上, 且

$AD \perp AB$ ，直线 BD 与 x 轴、 y 轴分别交于 M, N 两点.

- (i) 设直线 BD, AM 的斜率分别为 k_1, k_2 ，证明存在常数 λ 使得 $k_1 = \lambda k_2$ ，并求出 λ 的值；
 (ii) 求 $\triangle OMN$ 面积的最大值.

2014 年高考山东卷文科数学真题及参考答案

一. 选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题给出的四个选项中，选择符合题目要求的选项。

(1) 已知 $a, b \in R, i$ 是虚数单位，若 $a + i = 2 - bi$ ，则 $(a + bi)^2 =$

- (A) $3 - 4i$ (B) $3 + 4i$ (C) $4 - 3i$ (D) $4 + 3i$

【解析】由 $a + i = 2 - bi$ 得， $a = 2, b = -1$ ， $(a + bi)^2 = (2 - i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 3 - 4i$

故答案选 A

(2) 设集合 $A = \{x | x^2 - 2x < 0\}, B = \{x | 1 \leq x \leq 4\}$ ，则 $A \cap B =$

- (A) $(0, 2]$ (B) $(1, 2)$ (C) $[1, 2)$ (D) $(1, 4)$

【解析】 $A = (0, 2), B = [1, 4]$ ，数轴上表示出来得到 $A \cap B = [1, 2)$

故答案为 C

(3) 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\log_2 x - 1}}$ 的定义域为

- (A) $(0, 2)$ (B) $(0, 2]$ (C) $(2, +\infty)$ (D) $[2, +\infty)$

【解析】 $\log_2 x - 1 > 0$ 故 $x > 2$ 。选 D

(4) 用反证法证明命题“设 $a, b \in R$ ，则方程 $x^2 + ax + b = 0$ 至少有一个实根”时要做的假设是

- (A) 方程 $x^2 + ax + b = 0$ 没有实根 (B) 方程 $x^2 + ax + b = 0$ 至多有一个实根
 (C) 方程 $x^2 + ax + b = 0$ 至多有两个实根 (D) 方程 $x^2 + ax + b = 0$ 恰好有两个实根

【解析】答案选 A，解析略。

(5) 已知实数 x, y 满足 $a^x < a^y (0 < a < 1)$ ，则下列关系式恒成立的是

- (A) $x^3 > y^3$ (B) $\sin x > \sin y$

(C) $\ln(x^2+1) > \ln(y^2+1)$

(D) $\frac{1}{x^2+1} > \frac{1}{y^2+1}$

【解析】由 $a^x < a^y (0 < a < 1)$ 得, $x > y$, 但是不可以确定 x^2 与 y^2 的大小关系, 故 C、D 排除, 而 $y = \sin x$ 本身是一个周期函数, 故 B 也不对, $x^3 > y^3$ 正确。

(6) 已知函数 $y = \log_a(x+c)$ (a, c 为常数, 其中 $a > 0, a \neq 1$) 的图像如右图, 则下列结论成立的是

(A) $a > 1, c > 1$

(B) $a > 1, 0 < c < 1$

(C) $0 < a < 1, c > 1$

(D) $0 < a < 1, 0 < c < 1$

【解析】

由图象单调递减的性质可得 $0 < a < 1$, 向左平移小于 1 个单位, 故 $0 < c < 1$

答案选 C

(7) 已知向量 $a = (1, \sqrt{3}), b = (3, m)$. 若向量 a, b 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$, 则实数 $m =$

(A) $2\sqrt{3}$

(B) $\sqrt{3}$

(C) 0

(D) $-\sqrt{3}$

【解析】:

$$a \cdot b = 3 + \sqrt{3}m$$

$$a \cdot b = |a||b|\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{9+m^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore 3 + \sqrt{3}m = \sqrt{3} \cdot \sqrt{9+m^2} \therefore m = \sqrt{3}$$

答案: B

(8) 为了研究某药品的疗效, 选取若干名志愿者进行临床实验。所有志愿者的舒张压数据 (单位: kPa) 的分组区间为 $[12, 13), [13, 14), [14, 15), [15, 16]$. 将其按从左到右的顺序分别编号为第一组, 第二组, ……., 第五组。右图是根据试验数据制成的频率分布直方图。已知第一组和第二组共有 20 人, 第三组中没有疗效的有 6 人, 则第三组中有疗效的人数为

(A) 6

(B) 8

(C) 12

(D) 18

【解析】: 第一组与第二组频率之和为 $0.24+0.16=0.4$

$$20 \div 0.4 = 50$$

$$50 \times 0.36 = 18$$

$$18 - 6 = 12$$

答案: C

(9) 对于函数 $f(x)$, 若存在常数 $a \neq 0$, 使得 x 取定义域内的每一个值, 都有 $f(x) = f(2a-x)$, 则称 $f(x)$ 为准偶函数。下列函数中是准偶函数的是

(A) $f(x) = \sqrt{x}$

(B) $f(x) = x^2$

(C) $f(x) = \tan x$

(D) $f(x) = \cos(x+1)$

【解析】: 由分析可知准偶函数即偶函数左右平移得到的。

答案: D

(10) 已知 x, y 满足的约束条件 $\begin{cases} x-y-1 \leq 0, \\ 2x-y-3 \geq 0, \end{cases}$ 当目标函数 $z = ax + by (a > 0, b > 0)$ 在该约束条件下取得最

小值 $2\sqrt{5}$ 时, $a^2 + b^2$ 的最小值为

- (A) 5 (B) 4 (C) $\sqrt{5}$ (D) 2

【解析】: $\begin{cases} x-y-1 \leq 0 \\ 2x-y-3 \geq 0 \end{cases}$ 求得交点为 $(2,1)$, 则 $2a+b=2\sqrt{5}$, 即圆心 $(0,0)$ 到直线 $2a+b-2\sqrt{5}=0$ 的

距离的平方 $\left(\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)^2 = 2^2 = 4$ 。

答案: B

二. 填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分, 答案须填在题中横线上。

11. 执行右面的程序框图, 若输入的 x 的值为 1, 则输出的 n 的值为 _____。

【解析】: 根据判断条件 $x^2 - 4x + 3 \leq 0$, 得 $1 \leq x \leq 3$,

输入 $x=1$

第一次判断后循环, $x=x+1=2, n=n+1=1$

第二次判断后循环, $x=x+1=3, n=n+1=2$

第三次判断后循环, $x=x+1=4, n=n+1=3$

第四次判断不满足条件, 退出循环, 输出 $n=3$

答案: 3

12. 函数 $y = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \cos^2 x$ 的最小正周期为 _____。

【解析】: $y = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \cos^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$

$$\therefore T = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

答案: $T = \pi$

13. 一个六棱锥的体积为 $2\sqrt{3}$, 其底面是边长为 2 的正六边形, 侧棱长都相等, 则该六棱锥的侧面积为 _____。

【解析】: 设六棱锥的高为 h , 斜高为 h' ,

则由体积 $V = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 60^\circ \times 6\right) \times h = 2\sqrt{3}$ 得: $h=1, h' = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + h^2} = 2$

$\therefore$ 侧面积为 $\frac{1}{2} \times 2 \times h' \times 6 = 12$ 。

答案: 12

14. 圆心在直线 $x-2y=0$ 上的圆 C 与 y 轴的正半轴相切, 圆 C 截 x 轴所得的弦的长 $2\sqrt{3}$, 则圆 C 的标

准方程为_____。

【解析】 设圆心 $\left(a, \frac{a}{2}\right) (a > 0)$ ，半径为 a 。由勾股定理 $(\sqrt{3})^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$ 得： $a = 2$

$\therefore$ 圆心为 $(2, 1)$ ，半径为 2 ， $\therefore$ 圆 C 的标准方程为 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$

答案： $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$

15. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦距为 $2c$ ，右顶点为 A ，抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F ，若双曲线截抛物线的准线所得线段长为 $2c$ ，且 $|FA| = c$ ，则双曲线的渐近线方程为_____。

【解析】 由题意知 $\frac{P}{2} = \sqrt{c^2 - a^2} = b$ ，

抛物线准线与双曲线的一个交点坐标为 $\left(c, \frac{P}{2}\right)$ ，

即 $(c, -b)$ 代入双曲线方程为 $\frac{c^2}{a^2} - \frac{b^2}{b^2} = 1$ ，得 $\frac{c^2}{a^2} = 2$ ，

$\therefore$ 渐近线方程为 $y = \pm x$ ， $\therefore \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1} = 1$ 。

答案：1

三. 解答题：本大题共 6 小题，共 75 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(16) (本小题满分 12 分)

海关对同时从 A, B, C 三个不同地区进口的某种商品进行抽样检测，从各地区进口此种商品的数量（单位：件）如右表所示，工作人员用分层抽样的方法从这些商品中共抽取 6 件样品进行检测。

地区	A	B	C
数量	50	150	100

(I) 求这 6 件样品中来自 A, B, C 各地区样品的数量；

(II) 若在这 6 件样品中随机抽取 2 件送往甲机构进行进一步检测，求这 2 件商品来自相同地区的概率。

(16) 【解析】：

(I) 因为工作人员是按分层抽样抽取商品，所以各地区抽取商品比例为：

$$A : B : C = 50 : 150 : 100 = 1 : 3 : 2$$

所以各地区抽取商品数为： $A : 6 \times \frac{1}{6} = 1$ ， $B : 6 \times \frac{3}{6} = 3$ ， $C : 6 \times \frac{2}{6} = 2$ ；

(II) 设各地区商品分别为： $A, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2$

基本时间空间 Ω 为： $(A, B_1), (A, B_2), (A, B_3), (A, C_1), (A, C_2), (B_1, B_2), (B_1, B_3)$

$(B_1, C_1), (B_1, C_2), (B_2, B_3), (B_2, C_1), (B_2, C_2), (B_3, C_1), (B_3, C_2), (C_1, C_2)$, 共 15 个.

样本时间空间为: $(B_1, B_2), (B_1, B_3), (B_2, B_3), (C_1, C_2)$

所以这两件商品来自同一地区的概率为: $P(A) = \frac{4}{15}$.

(17) (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c . 已知 $a = 3, \cos A = \frac{\sqrt{6}}{3}, B = A + \frac{\pi}{2}$.

(I) 求 b 的值;

(II) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

(17) 【解析】:

(I) 由题意知: $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$$\sin B = \sin\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = \sin A \cos \frac{\pi}{2} + \cos A \sin \frac{\pi}{2} = \cos A = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{由正弦定理得: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow b = \frac{a \cdot \sin B}{\sin A} = 3\sqrt{2}$$

(II) 由余弦定理得:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow c^2 - 4\sqrt{3}c + 9 = 0 \Rightarrow c_1 = \sqrt{3}, c_2 = 3\sqrt{3},$$

又因为 $B = A + \frac{\pi}{2}$ 为钝角, 所以 $b > c$, 即 $c = \sqrt{3}$,

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

(18) (本小题满分 12 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AP \perp$ 平面 PCD , $AD \parallel BC$, $AB = BC = \frac{1}{2}AD$, E, F 分别为线段 AD, PC 的中点.

(I) 求证: $AP \parallel$ 平面 BEF

(II) 求证: $BE \perp$ 平面 PAC

【解析】: (I) 连接 AC 交 BE 于点 O , 连接 OF , 不妨设 $AB=BC=1$, 则 $AD=2$
 $\because AB=BC, AD \parallel BC, \therefore$ 四边形 $ABCE$ 为菱形

$\therefore O, F$ 分别为 AC, PC 中点, $\therefore OF \parallel AP$

又 $\because OF \subset$ 平面 $BEF, \therefore AP \parallel$ 平面 BEF

(II) $\because AP \perp$ 平面 $PCD, CD \subset$ 平面 $PCD, \therefore AP \perp CD$

$\because BC \parallel ED, BC = ED, \therefore BCDE$ 为平行四边形, $\therefore BE \parallel CD, \therefore BE \perp PA$

又 $\because ABCE$ 为菱形, $\therefore BE \perp AC$

又 $\because PA \cap AC = A, PA, AC \subset \text{平面} PAC, \therefore BE \perp \text{平面} PAC$

(19) (本小题满分 12 分)

在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $d=2$, a_2 是 a_1 与 a_4 等比中项.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $b_n = a_{\frac{n(n+1)}{2}}$, 记 $T_n = -b_1 + b_2 - b_3 + \cdots + (-1)^n b_n$, 求 T_n .

【解析】: (I) 由题意知:

$\{a_n\}$ 为等差数列, 设 $a_n = a_1 + (n-1)d$, $\because a_2$ 为 a_1 与 a_4 的等比中项

$\therefore a_2^2 = a_1 \times a_4$ 且 $a_1 \neq 0$, 即 $(a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 3d)$, $\because d=2$ 解得: $a_1 = 2$

$\therefore a_n = 2 + (n-1) \times 2 = 2n$

(II) 由 (I) 知: $a_n = 2n$, $b_n = a_{\frac{n(n+1)}{2}} = n(n+1)$

①当 n 为偶数时:

$$\begin{aligned} T_n &= -(1 \times 2) + (2 \times 3) - (3 \times 4) + \cdots + n(n+1) \\ &= 2(-1+3) + 4(-3+5) + \cdots + n[-(n-1) + (n+1)] \\ &= 2 \times 2 + 4 \times 2 + 6 \times 2 + \cdots + n \times 2 \\ &= 2 \times (2+4+6+\cdots+n) \\ &= 2 \times \frac{(2+n) \frac{n}{2}}{2} = \frac{n^2+2n}{2} \end{aligned}$$

②当 n 为奇数时:

$$\begin{aligned} T_n &= -(1 \times 2) + (2 \times 3) - (3 \times 4) + \cdots - n(n+1) \\ &= 2(-1+3) + 4(-3+5) + \cdots + (n-1)[-(n-2) + n] - n(n+1) \\ &= 2 \times 2 + 4 \times 2 + 6 \times 2 + \cdots + (n-1) \times 2 - n(n+1) \\ &= 2 \times [2+4+6+\cdots+(n-1)] - n(n+1) \\ &= 2 \times \frac{(2+n-1) \frac{n-1}{2}}{2} - n(n+1) = -\frac{n^2+2n+1}{2} \end{aligned}$$

综上: $T_n = \begin{cases} -\frac{n^2+2n+1}{2}, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{n^2+2n}{2}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$

(20) (本小题满分 13 分)

设函数 $f(x) = a \ln x + \frac{x-1}{x+1}$, 其中 a 为常数.

(I) 若 $a = 0$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

【解析】(1) 当 $a = 0$ 时 $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

$$f'(1) = \frac{2}{(1+1)^2} = \frac{1}{2}$$

又 $\because f(1) = 0 \therefore$ 直线过点 $(1, 0)$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$(2) f'(x) = \frac{a}{x} + \frac{2}{(x+1)^2} \quad (x > 0)$$

① 当 $a = 0$ 时, $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ 恒大于 0. $f(x)$ 在定义域上单调递增.

② 当 $a > 0$ 时, $f'(x) = \frac{a}{x} + \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{a(x+1)^2 + 2x}{x(x+1)^2} > 0$. $f(x)$ 在定义域上单调递增.

③ 当 $a < 0$ 时, $\Delta = (2a+2)^2 - 4a^2 = 8a+4 \leq 0$, 即 $a \leq -\frac{1}{2}$.

开口向下, $f(x)$ 在定义域上单调递减.

$$\text{当 } -\frac{1}{2} < a < 0 \text{ 时, } \Delta > 0. x_{1,2} = \frac{-(2a+2) \pm \sqrt{8a+4}}{2a} = \frac{-a-1 \pm \sqrt{2a+1}}{a}$$

$$\text{对称轴方程为 } x = -\frac{2a+2}{2a} = -1 - \frac{1}{a} > 0. \text{ 且 } x_1 \cdot x_2 = 1 > 0$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, \frac{-a-1-\sqrt{2a+1}}{a})$ 单调递减, $(\frac{-a-1-\sqrt{2a+1}}{a}, \frac{-a-1+\sqrt{2a+1}}{a})$ 单调递增,
 $(\frac{-a-1+\sqrt{2a+1}}{a}, +\infty)$ 单调递减.

综上所述, $a = 0$ 时, $f(x)$ 在定义域上单调递增; $a > 0$ 时, $f(x)$ 在定义域上单调递增

$a \leq -\frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在定义域上单调递减; $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{-a-1-\sqrt{2a+1}}{a})$ 单调递减,
 $(\frac{-a-1-\sqrt{2a+1}}{a}, \frac{-a-1+\sqrt{2a+1}}{a})$ 单调递增, $(\frac{-a-1+\sqrt{2a+1}}{a}, +\infty)$ 单调递减.

(21) (本小题满分 14 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 直线 $y = x$ 被椭圆 C 截得

的线段长为 $\frac{4\sqrt{10}}{5}$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 过原点的直线与椭圆 C 交于 A, B 两点 (A, B 不是椭圆 C 的顶点), 点 D 在椭圆 C 上, 且 $AD \perp AB$, 直线 BD 与 x 轴、 y 轴分别交于 M, N 两点.

(i) 设直线 BD, AM 的斜率分别为 k_1, k_2 . 证明存在常数 λ 使得 $k_1 = \lambda k_2$, 并求出 λ 的值;

(ii) 求 $\triangle OMN$ 面积的最大值.

【解析】(1) $\because e = \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 即 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{3}{4}, \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{3}{4} \therefore a^2 = 4b^2$

设直线与椭圆交于 p, q 两点。不妨设 p 点为直线和椭圆在第一象限的交点。

又 $\because$ 弦长为 $\frac{4\sqrt{10}}{5}, \therefore p(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})$

$$\therefore \frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$$

联立解得 $a^2 = 4, b^2 = 1$

$\therefore$ 椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.