# 中国人民大学附属中学 2014 届高三热身练习（一）

## 数学试题

2014.5.19

命题人：高三数学组全体老师

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，全卷满分 150 分，考试时间为 120 分钟.

### 第 I 卷（选择题 共 40 分）

一、选择题（本大题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分；在每个小题给出的四个选项中，有且只有一个是符合题目要求的）

1. 已知集合 $P=\left\{x\left|x^2\le 1\right.\right\}$，$M=\{a\}$，若 $P\cup M=P$，

则 $a$ 的取值范围是(　　)

A. $(-\infty,-1]$　　B. $[1,\infty)$

C. $[-1,1]$　　D. $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

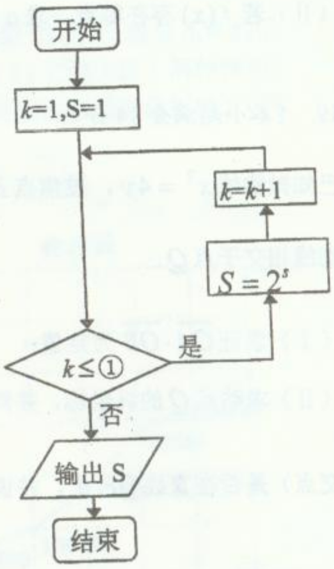
2. 下列命题中，真命题是（　　）

A. $a>1,b>1$ 是 $ab>1$ 的充分条件

B. $\forall x\in R,2^x>x^2$

C. $a+b=0$ 的充要条件是 $\dfrac{a}{b}=-1$

D. $\exists x_0\in R,e^{x_0}\le 0$



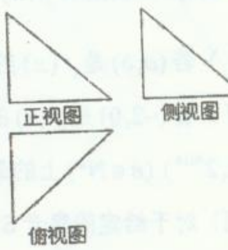

（第 3 题图）

3. 执行如图所示的程序框图，若输出的 $S$ 的值为16，则图中判断框内①处应填（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

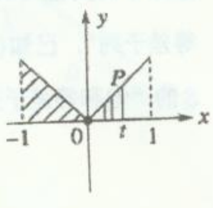
4. 有一种细菌和一种病毒，每个细菌在每秒钟杀死一个病毒的同时将自身分裂为 2 个，现在有一个这样的细菌和 100 个这样的病毒，问细菌将病毒全部杀死至少需要(　　)

A. 6 秒钟　　B. 7 秒钟　　C. 8 秒钟　　D. 9 秒钟

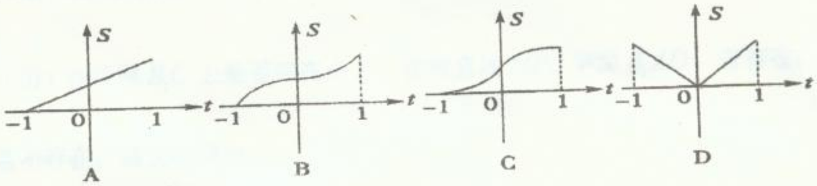



5. 如图，一个空间几何体的正视图、侧视图、俯视图均为全等的等腰直角三角形，如果直角三角形的直角边长都为 1，那么这个几何体的表面积为(　　)

A. $\dfrac{1}{6}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　D. $\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$




6. 在函数 $y=|x|\left(x\in[-1,1]\right)$ 的图象上有一点 $P(t,\ |t|)$，此函数与 $x$ 轴，直线 $x=-1$ 及 $x=t$ 围成图形(如图阴影部分)的面积为 $S$，则 $S$ 与 $t$ 的函数关系图可表示为(　　)



7．已知 $F_1$、$F_2$ 是两个定点，点 $P$ 是以 $F_1$ 和 $F_2$ 为公共焦点的椭圆和双曲线的一个交点，并且 $PF_1 \perp PF_2$，$e_1$ 和 $e_2$ 分别是上述椭圆和双曲线的离心率，则(　　)

A．$\dfrac{1}{e_1^2}+\dfrac{1}{e_2^2}=4$．　B．$e_1^2+e_2^2=4$　C．$\dfrac{1}{e_1^2}+\dfrac{1}{e_2^2}=2$　D．$e_1^2+e_2^2=2$

8．在平面直角坐标系中，$A(0,0),B(1,2)$ 两点绕定点 $P$ 顺时针分别旋转 $\theta$ 角到 $A'(4,4),B'(5,2)$，则 $\cos\theta$ 的值为（　　）

A.0　B．$-\dfrac{3}{5}$　C．$-\dfrac{1}{2}$　D．$\dfrac{1}{3}$

第二部分（非选择题 共 **110** 分）

**二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．把答案填在答题卡上．**

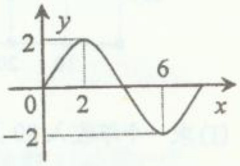
9．在复平面内，复数 $\dfrac{1+2i}{i}$ 对应的点位于第________象限．

10．以直角坐标系的原点 $O$ 为极点，$x$ 轴的正半轴为极轴建立极坐标系．

已知射线 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$（$\theta$ 为极角）与曲线 $\begin{cases}x=2\cos\alpha\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数，$0\le\alpha\le 2\pi$），

则射线与曲线有________个交点．

11．函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，则 $f(x)$ 的解析式为____________．




12．一生产过程有 4 道工序，每道工序需要安排一人照看，现从甲、乙、丙等 6 名工人中安排 4 人分别照看一道工序，第一道工序只能从甲、乙两工人中安排 1 人，第四道工序只能从甲、丙两工人中安排 1 人，则不同的安排方案共有____________种．

13．已知点 $P(x,y)$ 满足条件 $\begin{cases}x-y-2\le 0,\\ x+2y-5\ge 0,\\ y-a\le 0,\end{cases}$ 点 $A(2,1)$，且 $|\overrightarrow{OP}|\cdot\cos\angle AOP$ 的最大值为 $2\sqrt{5}$，则 $a$ 的值是_________．

14．若 $f(x)$ 是定义在 $R$ 的奇函数，且 $\forall x\ge 0$，总存在正常数 $T$ 使得 $f(x+T)=f(x)+T$ 成立，则称函数 $f(x)$ 具有“性质 P”．已知函数 $g(x)$ 具有“性质 P”，且 $g(x)$ 在 $[0,T]$ 上的解析式为 $g(x)=x^2$，

（1）常数 $T=$________；

（2）若当 $x\in[-3T,3T]$ 时，方程 $g(x)=kx$ 恰有 9 个根．则实数 $k=$______．

三、解答题（本大题共 6 个小题，共 80 分；解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

15.（本小题满分 13 分）

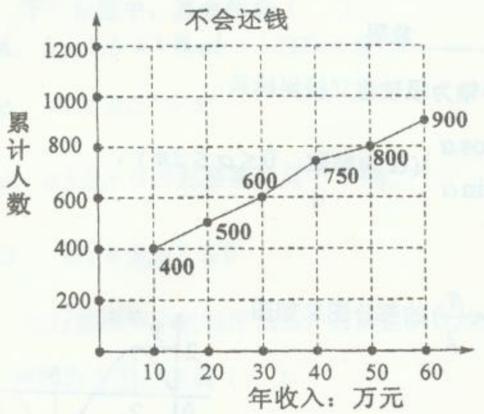
在$\triangle ABC$中，内角$A$，$B$，$C$的对边分别为$a$，$b$，$c$.已知$\dfrac{\cos A-2\cos C}{\cos B}=\dfrac{2c-a}{b}$

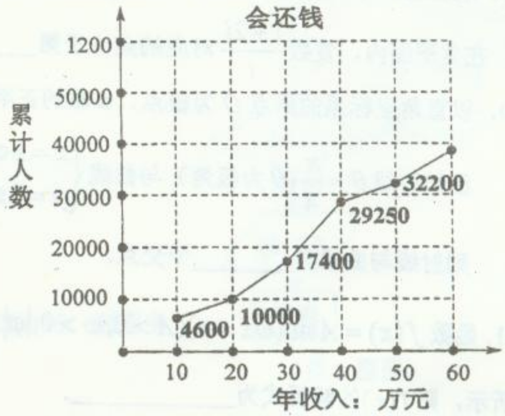
(I)求$\dfrac{\sin A}{\sin C}$的值；(II)若$\cos B=\dfrac{1}{4}$，$b=2$，求$\triangle ABC$的面积$S$.

16.（本小题满分 13 分）

某地区银行有一种一年期 20 万元的小额急用贷款，要求一年后还款 21 万元. 过去几年的记录显示：申办此项贷款者一年后只有依约还款 21 万元与违约不还（1 元都不还）两种情形. 且发现违约与否与借贷者的年收入有关，两种情形的累计人数统计的部分图表分别如下（例如图中年收入 20 万以下的人中违约不还的累计人数有 500 人）：

把统计的频率视为概率.



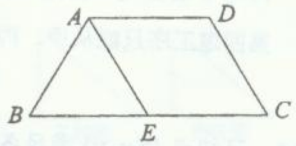




(I)求一个年收入 30 万元以下的贷款者依约还款的概率；

(II)若银行贷款给一个年收入 30 万元以下的客户，

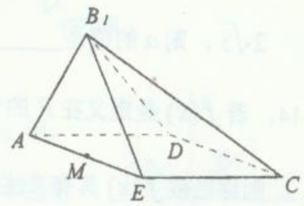
求银行的获利$X$元的分布列及其期望值？

17.（本小题满分 14 分）




在等腰梯形$ABCD$中，$AD//BC$，$AB=AD=\dfrac{1}{2}BC=2$，$E$是$BC$的中点，将$\Delta BAE$沿着$AE$翻折成$\Delta B_1AE$，

使平面$B_1AE\perp$平面$AECD$，$M$为线段$AE$的中点.




(Ⅰ) 求证：$CD\perp B_1D$；

(Ⅱ) 求二面角$D-AB_1-E$的余弦值；

(Ⅲ) 在线段$B_1C$上是否存在点$P$，使得直线$MP//$平面$B_1AD$，若存在，求出$\dfrac{B_1P}{B_1C}$的值；若不存在，请说明理由.

18.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=2ax-\ln 2x$，其中 $a\in R$．

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 在点 $(\frac{1}{2},f(\frac{1}{2}))$ 处的切线方程，并判断切线与 $f(x)$ 图象的交点个数；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 存在零点，求 $a$ 的取值范围．

19.（本小题满分 14 分）

已知抛物线 $x^2=4y$，过焦点 $F$ 的动直线 $l$ 交抛物线于 $A,B$ 两点，抛物线在 $A,B$ 两点处的切线相交于点 $Q$．

（Ⅰ）求证 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 为定值；

（Ⅱ）求动点 $Q$ 的纵坐标，并判断三角形 $QAB$ 的垂心（三角形的垂心为三条高所在直线的交点）是否在直线 $QF$ 上，并说明理由．

20.（本小题满分 13 分）

对于函数 $y=f(x)$ 与常数 $a,b$，若 $f(2x)=af(x)+b$ 恒成立，则称 $(a,b)$ 为函数 $f(x)$ 的一个"$P$ 数对"；设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}^+$，且 $f(1)=3$．

（Ⅰ）若 $(a,b)$ 是 $f(x)$ 的一个"$P$ 数对"，且 $f(2)=6, f(4)=9$，求常数 $a,b$ 的值；

（Ⅱ）若 $(-2,0)$ 是 $f(x)$ 的一个"$P$ 数对"，且当 $x\in[1,2)$ 时 $f(x)=k-|2x-3|$，求 $f(x)$ 在区间 $[1,2^{2014})$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 上的最大值与最小值；

（Ⅲ）对于给定的集合 $S$，设 $T$ 为至少含有两项的公差为正的等差数列，其项都在 $S$ 中，若添加 $S$ 的其他元素于 $T$ 中后均不能构成与 $T$ 有相同公差的等差数列，则称 $T$ 为 $S$ 的"饱和等差子列"．已知 $(1,1)$ 是 $f(x)$ 的一个"$P$ 数对"，且 $S=\{1,2,3,\cdots,f(2^n)-f(1)\}(n\in\mathbf{N}^*)$，求 $S$ 的"饱和等差子列" $T$ 的个数．（注：这里只有两个数的数列也看作等差数列）