中国人民大学附属中学2014届高三热身练习（一）

数学试题

2014. 5. 19

命题人：高三数学组全体老师

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，全卷满分150分，考试时间为120分钟.

第Ⅰ卷（选择题 共40分）

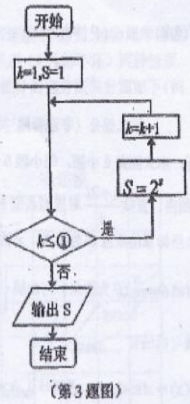
一、选择题（本大题共8个小题，每小题5分，共40分，在每个小题给出的四个选项中，有且只有一个是符合题目要求的）

1．已知集合 $P=\left\{x\left|x^2\le 1\right.\right\}$，$M=\{a\}$，若 $P\cup M=P$，

则 a 的取值范围是(　　)

A．$(-\infty,-1]$　　B．$[1,\infty)$

C．$[-1,1]$　　D．$(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$



（第3题图）

2．下列命题中，真命题是（　）

A．$a>1,b>1$ 是 $ab>1$ 的充分条件

B．$\forall x\in R,2^x>x^2$

C．$a+b=0$ 的充要条件是 $\dfrac{a}{b}=-1$

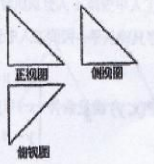
D．$\exists x_0\in R,e^{x_0}\le 0$

3．执行如图所示的程序框图，若输出的 S 的值为16，则图中判断框内①处应填（　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

4．有一种细菌和一种病毒，每个细菌在每秒钟杀死一个病毒的同时将自身分裂为2个，现在有一个这样的细菌和100个这样的病毒，问细菌将病毒全部杀死至少需要(　　)

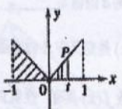
A．6秒钟　B．7秒钟　C．8秒钟　D．9秒钟

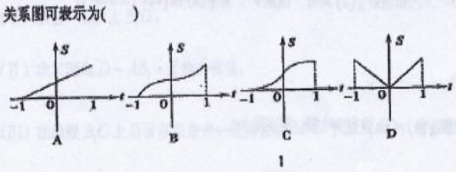


5．如图，一个空间几何体的正视图、侧视图、俯视图均为全等的等腰直角三角形，如果直角三角形的直角边长都为1，那么这个几何体的表面积为(　　)

A．$\dfrac{1}{6}$　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　C．$\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　D．$\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6．在函数 $y=|x|\left(x\in[-1,1]\right)$ 的图象上有一点 $P(t,|t|)$，此函数与 x 轴，直线 $x=-1$ 及 $x=t$ 围成图形(如图阴影部分)的面积为 S，则 S 与 t 的函数关系图可表示为(　　)





7. 已知F_1、F_2是两个定点，点P是以F_1和F_2为公共焦点的椭圆和双曲线的一个交点，并且$PF_1 \perp PF_2$，e_1和e_2分别是上述椭圆和双曲线的离心率，则(　　)

A. $\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=4$.　　B. $e_1^2+e_2^2=4$　　C. $\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=2$　　D. $e_1^2+e_2^2=2$

8．在平面直角坐标系中，$A(0,0),B(1,2)$两点绕定点P顺时针分别旋转θ角到$A'(4,4),B'(5,2)$，则$\cos\theta$的值为（　　）

A.0　　B. $-\frac{3}{5}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$

第二部分（非选择题 共110分）

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分.把答案填在答题卡上.

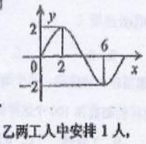
9. 在复平面内，复数$\frac{1+2i}{i}$对应的点位于第________象限.

10. 以直角坐标系的原点O为极点，x轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

已知射线$\theta=\frac{\pi}{4}$(θ为极角）与曲线$\begin{cases}x=2\cos\alpha\\y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$为参数，$0\le\alpha\le2\pi$），

则射线与曲线有 ______个交点.

11. 函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$的部分图象如图所示，则$f(x)$的解析式为____________.



12. 一生产过程有4道工序，每道工序需要安排一人照看，现从甲、乙、丙等6名工人中安排4人分别照看一道工序，第一道工序只能从甲、乙两工人中安排1人，第四道工序只能从甲、丙两工人中安排1人，则不同的安排方案共有__________种.

13. 已知点$P(x,y)$满足条件$\begin{cases}x-y-2\le0,\\x+2y-5\ge0,\\y-a\le0,\end{cases}$点$A(2,1)$，且$|\overrightarrow{OP}|\cdot\cos\angle AOP$的最大值为$2\sqrt{5}$，则$a$的值是________.

14. 若$f(x)$是定义在R的奇函数，且$\forall x\ge0$，总存在正常数T使得$f(x+T)=f(x)+T$成立，则称函数$f(x)$具有"性质P"．已知函数$g(x)$具有"性质P"，且$g(x)$在$[0,T]$上的解析式为$g(x)=x^2$，

（1）常数$T=$______；

（2）若当$x\in[-3T,3T]$时，方程$g(x)=kx$恰有9个根．则实数$k=$____.

三、解答题（本大题共6个小题，共80分；解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

15.（本小题满分13分）

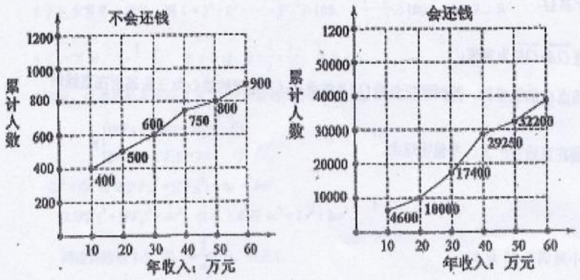
在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c.已知$\dfrac{\cos A-2\cos C}{\cos B}=\dfrac{2c-a}{b}$.

(I)求$\dfrac{\sin A}{\sin C}$的值；(II)若$\cos B=\dfrac{1}{4}$，$b=2$，求$\triangle ABC$的面积S.

16.（本小题满分13分）

某地区银行有一种一年期20万元的小额急用贷款，要求一年后还款21万元.过去几年的记录显示：申办此项贷款者一年后只有依约还款21万元与违约不还（1元都不还）两种情形.且发现违约与否与借贷者的年收入有关，两种情形的累计人数统计的部分图表分别如下(例如图中年收入20万以下的人中违约不还的累计人数有500人).

把统计的频率视为概率.

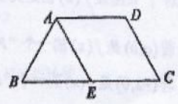


(I)求一个年收入30万元以下的贷款者依约还款的概率；

(II)若银行贷款给一个年收入30万元以下的客户，

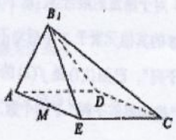
求银行的获利X元的分布列及其期望值？

17.（本小题满分14分）



在等腰梯形$ABCD$中，$AD//BC$，$AB=AD=\dfrac{1}{2}BC=2$，E是BC的中点，将ΔBAE沿着AE翻折成ΔB_1AE，

使平面$B_1AE\perp$平面$AECD$，M为线段AE的中点.



（I）求证：$CD\perp B_1D$；

（II）求二面角$D-AB_1-E$的余弦值；

（III）在线段B_1C上是否存在点P，使得直线$MP//$平面B_1AD，若存在，求出$\dfrac{B_1P}{B_1C}$的值；若不存在，请说明理由.

3

18.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=2ax-\ln 2x$，其中 $a\in R$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 在点 $(\frac{1}{2},f(\frac{1}{2}))$ 处的切线方程，并判断切线与 $f(x)$ 图象的交点个数；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 存在零点，求 a 的取值范围.

19.（本小题满分 14 分）

已知抛物线 $x^2=4y$，过焦点 F 的动直线 l 交抛物线于 A,B 两点，抛物线在 A,B 两点处的切线相交于点 Q.

（Ⅰ）求证 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 为定值；

（Ⅱ）求动点 Q 的纵坐标，并判断三角形 QAB 的垂心（三角形的垂心为三条高所在直线的交点）是否在直线 QF 上，并说明理由.

20.（本小题满分 13 分）

对于函数 $y=f(x)$ 与常数 a,b，若 $f(2x)=af(x)+b$ 恒成立，则称 (a,b) 为函数 $f(x)$ 的一个"P 数对"；设函数 $f(x)$ 的定义域为 R^+，且 $f(1)=3$.

（Ⅰ）若 (a,b) 是 $f(x)$ 的一个"P 数对"，且 $f(2)=6,f(4)=9$，求常数 a,b 的值；

（Ⅱ）若 $(-2,0)$ 是 $f(x)$ 的一个"P 数对"，且当 $x\in[1,2)$ 时 $f(x)=k-|2x-3|$，求 $f(x)$ 在区间 $[1,2^{2014})$ $(n\in\mathrm{N}^*)$ 上的最大值与最小值；

（Ⅲ）对于给定的集合 S，设 T 为至少含有两项的公差为正的等差数列，其项都在 S 中，若添加 S 的其他元素于 T 中后均不能构成与 T 有相同公差的等差数列，则称 T 为 S 的"饱和等差子列"．已知 $(1,1)$ 是 $f(x)$ 的一个"P 数对"，且 $S=\{1,2,3,\cdots,f(2^n)-f(1)\}(n\in\mathrm{N}^*)$，求 S 的"饱和等差子列" T 的个数.（注：这里只有两个数的数列也看作等差数列）

中国人民大学附属中学 2014 届高三热身练习（一）

数学试题

命题人：高三数学组全体老师　　2014.5.19

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，全卷满分 150 分，考试时间为 120 分钟.

第Ⅰ卷（选择题　共 40 分）

一、选择题（本大题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分；在每个小题给出的四个选项中，有且只有一个是符合题目要求的）

答案：C. A. B，B，　D，B.C，B

3.【答案】依题意得知，当 $a=1$ 时，$b=2$；当 $a=2$ 时，$b=2^2=4$；当 $a=3$ 时，$b=2^4=16$，7 秒钟

4.设至少需要 n 秒钟，则 $1+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}\geqslant 100$，$\therefore \frac{1-2^n}{1-2}\geqslant 100$，$\therefore n\geqslant 7$.，B

6.当 $t\leqslant 0$ 时，$S=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t^2$；当 $t>0$ 时，$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t^2$，故选

7.解析：设椭圆的长半轴长为 a，双曲线的实半轴长为 m，

则 $\begin{cases}|PF_1|+|PF_2|=2a & ①\\ \big||PF_1|-|PF_2|\big|=2m & ②\end{cases}$

$①^2+②^2$ 得 $2(|PF_1|^2+|PF_2|^2)=4a^2+4m^2$，

又 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=4c^2$，代入上式得 $4c^2=2a^2+2m^2$，

两边同除以 $2c^2$，得 $2=\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}$，故选 C.

8. P 点是直线 AA' 与 BB' 的垂直平分线的交点（3，1），然后结合对图形的分析灵活选择方法。

9 题 .第 4 象限；10 题 .有 1 个交点．11 题 .$f(x)=2\sin\frac{\pi}{4}x$

12 题 .(1)第一道工序安排甲时有 $1\times1\times4\times3=12$ 种；

(2)第一道工序不安排甲时有 $1\times2\times4\times3=24$ 种．　$\therefore$ 共有 12+24=36 种.

13 题.

【答案】2

【解析】画出点 P 满足条件所表示的可行域，又 $\overline{OA}\cdot\overline{OP}=|\overline{OA}||\overline{OP}|\cdot\cos\angle AO$

又 $\overline{OA}\cdot\overline{OP}=2x+y$，当取可行域内点 $(a+2,a)$ 时，$2x+y$ 取得最大值 $3a+$

所以 $|\overline{OP}|\cdot\cos\angle AOP=\frac{3a+4}{|\overline{OA}|}=\frac{3a+4}{\sqrt5}$，令 $\frac{3a+4}{\sqrt5}=2\sqrt5\Rightarrow a=2$，故选

或利用几何意义解决。

14 题．读懂题，数学结合解决问题．$T=$ __1__；实数 $k=$ __$2\sqrt6-4$__.

三、解答题（本大题共6个小题，共80分；解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

15. 在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c.已知$\dfrac{\cos A-2\cos C}{\cos B}=\dfrac{2c-a}{b}$.

(1)求$\dfrac{\sin A}{\sin C}$的值；

(2)若$\cos B=\dfrac{1}{4}$，$b=2$，求$\triangle ABC$的面积S.

解：(1)由正弦定理，设$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=k$，

则$\dfrac{2c-a}{b}=\dfrac{2k\sin C-k\sin A}{k\sin B}=\dfrac{2\sin C-\sin A}{\sin B}$ …………………… 2分

所以$\dfrac{\cos A-2\cos C}{\cos B}=\dfrac{2\sin C-\sin A}{\sin B}$

即$(\cos A-2\cos C)\sin B=(2\sin C-\sin A)\cos B$，

化简可得$\sin(A+B)=2\sin(B+C)$…………………… 4分

又$A+B+C=\pi$，

所以$\sin C=2\sin A$.因此$\dfrac{\sin A}{\sin C}=\dfrac{1}{2}$ …………………… 6分

(2)由$\dfrac{\sin A}{\sin C}=\dfrac{1}{2}$，所以$\dfrac{\sin C}{\sin A}=2$得$c=2a$………… 8分

由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$及$\cos B=\dfrac{1}{4}$，$b=2$，……… 10分

得$4=a^2+4a^2-4a^2\times\dfrac{1}{4}$

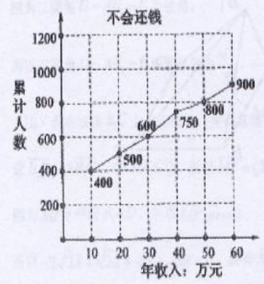
解得$a=1$，从而$c=2$

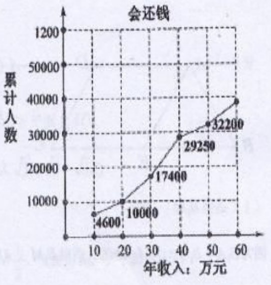
又因为$\cos B=\dfrac{1}{4}$，且$0<B<\pi$，所以$\sin B=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$…………………… 12分

因此$S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times1\times2\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ ……………………………… 13分

16. 某地区银行有一种一年期20万元的小额急用贷款，要求一年后还款21万元.过去几年的记录显示：申办此项贷款者一年后只有依约还款21万元与违约不还（1元都不还）两种情形.且发现违约与否与借贷者的年收入有关，两种情形的累计人数统计的部分图表分别如下（例如图中年收入20万以下的人中违约不还的累计人数有500人）；若视统计的频率为概率.

2





(I)求一个年收入 30 万元以下的贷款者依约还款的概率；

(II)若银行贷款给一个年收入 30 万元以下的客户，求银行的获利 X 元的分布列及其期望值？

解：(I) 设一个年收入 30 万元以下的贷款者依约还款的事件为 A

由图知年收入 30 万元以下不会还钱有 600 人， 会还钱有 17400 人．…………3 分

$\therefore P(A)=\dfrac{17400}{600+17400}=\dfrac{17400}{18000}=\dfrac{29}{30}$ ．…………6 分

(II) 银行的获利 X（万元）的取值为 1、-20 …………8 分

X（万元）	1	-20
P	$\frac{29}{30}$	$\frac{1}{30}$

……………………11 分

$E(X)=1\times\dfrac{29}{30}-20\times\dfrac{1}{30}$

$=\dfrac{29-20}{30}=\dfrac{9}{30}=0.3$（万元） …………12 分

答：若银行贷款给一个年收入 30 万元以下的客户，则银行的获利的期望值为 3000…13 分

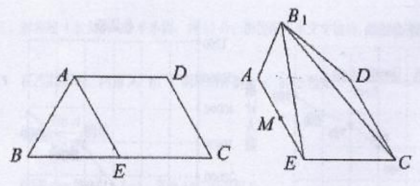
17. 在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD//BC$，$AB=AD=\dfrac{1}{2}BC=2$，E 是 BC 的中点，将 ΔBAE 沿着 AE 翻折成 ΔB_1AE，使平面 $B_1AE\perp$ 平面 $AECD$，M 为线段 AE 的中点.

（Ⅰ）求证：$CD\perp B_1D$；

（Ⅱ）求二面角 $D-AB_1-E$ 的余弦值；

（Ⅲ）在线段 B_1C 上是否存在点 P，使得直线 $MP//$ 平面 B_1AD，若存在，求出 $\dfrac{B_1P}{B_1C}$ 的值；若不存在，请说明理由.

3



（Ⅰ）连结B_1M、MD，

因为$B_1A=B_1E$，$AM=ME$，所以$B_1M\perp AE$，

因为平面$B_1AE\perp$平面$AECD$，

平面$B_1AE\cap$平面$AECD=AE$

所以$B_1M\perp$平面$AECD$，

因为$CD\subset$平面$AECD$

所以$B_1M\perp CD$，…………1分

因为$AM=ME$ $AD=DE$ 所以$AE\perp MD$，$AE//CD$，$CD\perp MD$，…………2分

因为$MD\cap B_1M=M$，$MD,B_1M\subset$平面B_1MD，

所以$CD\perp$平面B_1MD，…………3分

又因$B_1D\subset$平面B_1MD

所以$CD\perp B_1D$。…………4分

（Ⅱ）以ME为x轴，MD为y轴，MB_1为z轴建立直角坐标系，则

$C(2,\sqrt{3},0),B_1(0,0,\sqrt{3}),A(-1,0,0),D(0,\sqrt{3},0)$

平面AB_1D的法向量为$\overrightarrow{MD}=(0,\sqrt{3},0)$

设平面DB_1A的法向量为$\overrightarrow{m}=(x,y,z)$

因为$\overrightarrow{AB_1}=(1,0,\sqrt{3}),\overrightarrow{AD}=(1,\sqrt{3},0)$

因为$\begin{cases}x+\sqrt{3}z=0\\x+\sqrt{3}y=0\end{cases}$，令$z=1$得，$\overrightarrow{m}=(-\sqrt{3},1,1)$

因为$\cos<\overrightarrow{m},\overrightarrow{MD}>=\frac{\sqrt{5}}{5}$

4

因为二面角$D-AB_1-E$为锐角，

所以二面角$D-AB_1-E$的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$。……………………………………9分

（III）设在线段B_1C上存在点P，使得直线$MP//$平面B_1AD，

设$\overrightarrow{B_1P}=\lambda\overrightarrow{B_1C}$，$(0\le\lambda\le 1)$　所以$\overrightarrow{MP}=(2\lambda,\sqrt{3}\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$

因为$MP//$平面B_1AD，所以$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{m}=0$，

所以$-2\sqrt{3}\lambda+\sqrt{3}\lambda+\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda=0$，解得$\lambda=\frac{1}{2}$．又因为$MP\not\subset$平面$B_1AD$，

所以在线段B_1C上存在点P，使得直线$MP//$平面B_1AD，$\frac{B_1P}{B_1C}=\frac{1}{2}$．———14分

18．已知函数$g(x)=2ax-\ln 2x$，其中$a\in R$．

（I）当$a=1$时，求$g(x)$在点$(\frac{1}{2},g(\frac{1}{2}))$处的切线方程，并判断切线与$g(x)$图象的交点个数；

（II）若$g(x)$存在零点，求a的取值范围．

解：（I）函数$f(x)$的定义域为$\{x|x>0\}$

当$a=1$时，$f(x)=2x-\ln 2x, f'(x)=\frac{2x-1}{x}$，所以$f'(\frac{1}{2})=0$

又$f(\frac{1}{2})=1$，所以$g(x)$在点$(\frac{1}{2},g(\frac{1}{2}))$处的切线方程为$y=1$……………………4分

列表

x	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以$f(x)\ge[f(x)]_{\min}=f(\frac{1}{2})=1$．……………………………………5分

所以切线$y=1$与$f(x)$的图象只有一个交点．……………………………6分

（II）函数$f(x)$的定义域为$\{x|x>0\}$

$f'(x)=\frac{2ax-1}{x}$……………………………………7分

当$a=0$时，$f(x)=-\ln 2x$，$x=\frac{1}{2}$是$f(x)$的零点。……………………8分

当$a<0$时，$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上为减函数。

因为$x\to 0$时，$f(x)\to +\infty$，且$f(\frac{1}{2})=a<0$，

所以$f(x)$在区间$(0,\frac{1}{2}]$上一定存在一个零点。……………………10分

当$a>0$时，$f'(x)=\dfrac{2a(x-\frac{1}{2a})}{x}$ 列表

x	$(0,\frac{1}{2a})$	$\frac{1}{2a}$	$(\frac{1}{2a},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

因为$x\to 0$时，$f(x)\to +\infty$，$x\to +\infty$时，$f(x)<0$，

由$g(x)$存在零点知，$[f(x)]_{\min}=f(\frac{1}{2a})\le 0$，解得$0<a\le\frac{1}{e}$。……………12分

综上，a的取值范围是$(-\infty,\frac{1}{e}]$。……………………13分

19.已知抛物线$x^2=4y$，过焦点F斜率为k的动直线l交抛物线于A,B两点，抛物线在A,B两点处的切线相交于点Q.

（Ⅰ）求证$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$为定值；

（Ⅱ）求动点Q的纵坐标，并判断三角形QAB的垂心（三角形的垂心为三条高所在直线的交点）是否在直线QF上，并说明理由.

（Ⅰ）$\because F(0,1)$，又依题意直线l不与x轴垂直，

$\therefore$设直线l的方程为$y=kx+1$. ……………1分

由$\begin{cases}y=kx+1,\\x^2=4y,\end{cases}$可得$x^2-4kx-4=0$.　　设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则$\Delta=\ldots\ldots>0, x_1+x_2=4k, x_1x_2=-4$. ……………3分

$y_1\cdot y_2=(kx_1+1)\cdot(kx_2+1)=k^2x_1x_2+k(x_1+x_2)+1=-4k^2+k^2 4+1=1$, …4分

$\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=-3$. ………5分

（Ⅱ）①：由 $x^2=4y$，可得 $y=\dfrac{x^2}{4}$，$\therefore y'=\dfrac{x}{2}$. …………6分

$\therefore$ 抛物线在 A、B 两点处的切线的斜率分别为 $\dfrac{x_1}{2},\dfrac{x_2}{2}$.

$\therefore$ 在点 A 处的切线方程为 $y-y_1=\dfrac{x_1}{2}(x-x_1)$，即 $y=\dfrac{x_1}{2}x-\dfrac{{x_1}^2}{4}$. …………8分

同理在点 B 处的切线方程为 $y=\dfrac{x_2}{2}x-\dfrac{{x_2}^2}{4}$. …………9分

解方程组 $\begin{cases} y=\dfrac{x_1}{2}x-\dfrac{{x_1}^2}{4}, \\ y=\dfrac{x_2}{2}x-\dfrac{{x_2}^2}{4}, \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x=2k, \\ y=-1. \end{cases}$ 即点 Q 的纵坐标为 -1. ……10分

所以 $Q=(2k,-1)$，$\overrightarrow{QF}=(-2k,2)$， ………………11分

$\overrightarrow{AB}=(1,k)$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{QF}=0$，则 $AB\perp QF$， ………………13分

所以三角形 QAB 的垂心在直线 QF， ……………………………14分

20．对于函数 $y=f(x)$ 与常数 a,b，若 $f(2x)=af(x)+b$ 恒成立，则称 (a,b) 为函数 $f(x)$ 的一个"P 数对"；设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}^+$，且 $f(1)=3$.

（Ⅰ）若 (a,b) 是 $f(x)$ 的一个"P 数对"，且 $f(2)=6, f(4)=9$，求常数 a,b 的值；

（Ⅱ）若 $(-2,0)$ 是 $f(x)$ 的一个"P 数对"，且当 $x\in[1,2)$ 时 $f(x)=k-|2x-3|$，求 $f(x)$ 在区间 $[1,2^{2014})$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 上的最大值与最小值；

（Ⅲ）对于给定的集合 S，设 T 为至少含有两项的公差为正的等差数列，其项都在 S 中，若添加 S 的其他元素于 T 中后均不能构成与 T 有相同公差的等差数列，则称 T 为 S 的"饱和等差子列"．已知 $(1,1)$ 是 $f(x)$ 的一个"P 数对"，且 $S=\{1,2,3,\cdots,f(2^n)-f(1)\}(n\in\mathbf{N}^*)$，求 S 的"饱和等差子列" T 的个数．(注：这里只有两个数的数列也看作等差数列)

解：（Ⅰ）由题意知 $\begin{cases} af(1)+b=f(2) \\ af(2)+b=f(4) \end{cases}$，即 $\begin{cases} 3a+b=6 \\ 6a+b=9 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$； …………3分

（Ⅱ）当 $x\in[1,2)$ 时，$f(x)=k-|2x-3|$，令 $x=1$，可得 $f(1)=k-1=3$，

解得 $k=4$，即 $x\in[1,2)$ 时，$f(x)=4-|2x-3|$，故 $f(x)$ 在 $[1,2)$ 上的取值范围是 $[3,4]$ …4分

又 $(-2,0)$ 是 $f(x)$ 的一个"P 数对"，故 $f(2x)=-2f(x)$ 恒成立，

当 $x\in[2^{k-1},2^k)$ $(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，$\dfrac{x}{2^{k-1}}\in[1,2)$，$f(x)=-2f(\dfrac{x}{2})=4f(\dfrac{x}{4})=\cdots=(-2)^{k-1}f(\dfrac{x}{2^{k-1}})$ 6分

故 k 为奇数时，$f(x)$ 在 $[2^{k-1},2^{k})$ 上的取值范围是 $[3\times 2^{k-1},2^{k+1}]$；

当 k 为偶数时，$f(x)$ 在 $[2^{k-1},2^{k})$ 上的取值范围是 $[-2^{k+1},-3\times 2^{k-1}]$．…………………7 分

所以 $f(x)$ 在 $[1,2^{2014})$ 上的最大值为 2^{2014}，最小值为 -2^{2015}．…………………8 分

（Ⅲ）由题意知 $f(2x)=f(x)+1$ 恒成立，令 $x=2^{k}(k\in \mathbf{N})$，

可得 $f(2^{k+1})=f(2^{k})+1$，$\therefore \{f(2^{k})\}$ 是公差为 1 的等差数列，

故 $f(2^{n})=f(2^{0})+n$，又 $f(2^{0})=3$，故 $f(2^{n})=n+3$． 故 $S=\{1,2,3,\cdots,n\}(n\in \mathbf{N}^{*})$．9 分

当 n 为偶数时，$\dfrac{n^{2}}{4}$ 个．…………………11 分 当 n 为奇数时，$\dfrac{n^{2}-1}{4}$ 个．…………13 分